Loi binomiale

Objectifs :

- Être capable de modéliser la répétition d'expériences identiques et indépendantes à deux ou trois issues à l'aide d'un arbre pondéré ; savoir exploiter cette modélisation pour calculer des probabilités
- Reconnaitre une épreuve de Bernoulli et déterminer sa loi
- Reconnaitre un schéma de Bernoulli et la loi binomiale qui lui est associée
- Calculer l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale
- Représenter graphiquement la loi binomiale
- Connaitre la définition et les propriétés des coefficients binomiaux, être capable d'utiliser le triangle de Pascal

Aperçu historique :

La famille Bernoulli vivait à Bâle (Suisse). Entre le XVII° et le XIX° siècle, cette famille, qui était à l'origine une famille de marchands, a fourni à son temps une véritable dynastie de grands mathématiciens. Parmi eux , les frères Johann et Jakob ne s'entendaient pas très bien mais étaient tous les deux de grands admirateurs de Leibniz : ils se sont rangés à ses côtés lors de la querelle qui l'a opposé à Newton pour la paternité du calcul différentiel et intégral.
C'est Jakob (1654-1705)qui a donné son nom à "l'épreuve de Bernoulli". Professeur à l'université de Bâle à partir de 1682, il fut nommé associé de l'Académie des sciences de Paris en 1699 et de celle de Berlin en 1701. C'est dans Ars Conjectandi ("l'art de conjecturer"), un ouvrage publié à titre posthume par son neveu, Nicolas Bernoulli, en 1713, que Jakob Bernoulli consolide et développe la théorie des probabilités. Il y expose sa théorie des permutations et des combinaisons, qui constitue aujourd'hui les fondements de la combinatoire.

1. Épreuve de Bernoulli. Loi Binomiale

A. Épreuve de Bernoulli

Définition 9.1 On appelle épreuve de Bernoulli de paramètre p toute épreuve aléatoire admettant exactement deux issues.

- l'une appelée succès, dont la probabilité d'apparaître est p
- l'autre appelée échec, dont la probabilité d'apparaître est 1-p

La loi de Bernouilli est donc résumée dans le tableau suivant (on note 0 l'échec et 1 le succès) :

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1-p$	p

On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p et on note $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Propriété 9.1 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p. Alors :

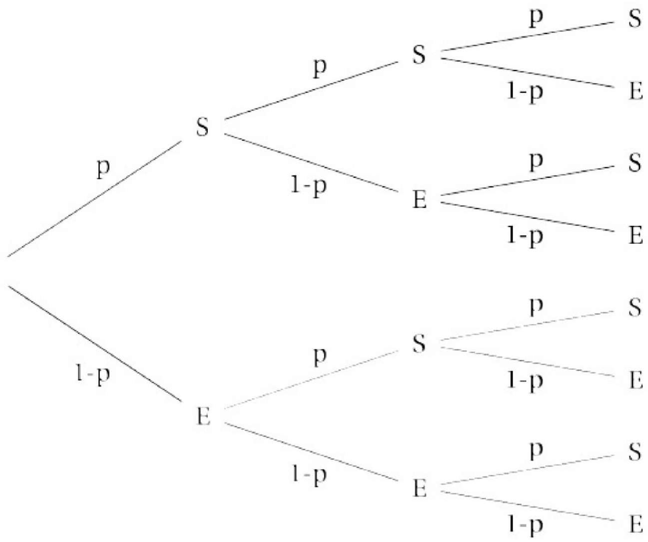
$$E(X) = p \quad ; \quad V(X) = p \times (1-p) \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{p \times (1-p)}$$

Démonstration On a : $E(X) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$.
De même : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0^2 \times (1-p) + 1^2 \times p - p^2 = p(1-p)$

B. Loi binomiale

Définition 9.2 On appelle schéma de n épreuves de Bernoulli de paramètre p toute expérience aléatoire consistant à répéter n fois de façon indépendante la même épreuve de Bernoulli de paramètre p.
Un résultat d'une telle expérience est une liste de n issues (SE...SSE), où l'on note S pour succès et E pour échec. La variable aléatoire associant à chaque issue le nombre k de succès est appelée loi binomiale de paramètres n et p.

Remarque 9.1 La représentation la plus courante d'un schéma de n épreuves de Bernoulli est un arbre pondéré :



En observant cet arbre, on remarque que pour $0 \leq k \leq 3$, chaque chemin menant à k succès et $3-k$ échec(s) a la même probabilité d'apparaître, c'est-à-dire $p^k \times (1-p)^{n-k}$. En notant $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins aboutissant à k succès exactement (dans le cas d'une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes) on obtient la propriété suivante :

Propriété 9.2 Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors on a :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$$

Exemple 9.1 On lance trois fois de suite un dé équilibré à six faces. On s'intéresse au nombre de "6" obtenus à l'issue des trois lancers. Le dé est équilibré et n'a pas de mémoire, donc il s'agit bien de la répétition de trois épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le nombre de "6" est donc une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$.
En utilisant l'arbre précédent, on constate qu'il y a trois chemins qui mènent à 2 succès et 1 échec, donc la probabilité d'obtenir exactement deux "6" est :

$$p(X = 2) = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{72}$$

Propriété 9.3 (admise)
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors :

$$E(X) = np \quad ; \quad V(X) = np(1-p) \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$$

C. À la calculatrice

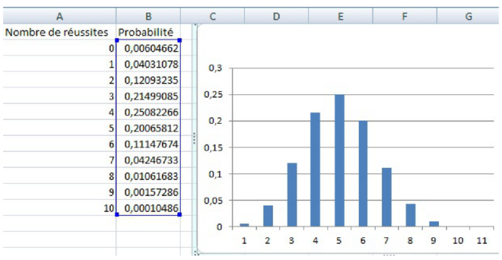
La calculatrice permet de déterminer $p(X = k)$ et $p(X \leq k)$ directement. Dans le tableau ci-dessous on s'intéresse à une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0; 1]$ et avec k entier tel que $0 \leq k \leq n$.

	TI	Casio
Syntaxe	Touche 2nde, puis var ; dans l'onglet DISTRIB, faire défiler jusqu'à binomFdp(ou binomFRép(	Menu Distrib (2nde puis var), puis binomFdp ou binomFrép
$p(X = k)$	binomFdp : taper la valeur de : n, puis p, puis k	binomFdp(n,p,k)
$p(X \leq k)$	binomFRép : taper la valeur de : n, puis p, puis k	binomFRép(n,p,k)

Sur un tableur OpenOffice,
la fonction =LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;0) donne $p(X = k)$,
et la fonction =LOI.BINOMIALE(k ;n ;p ;1) donne $p(X \leqslant k)$.

D. Représentation graphique

On peut représenter une loi binomiale par un diagramme en bâtons. Pour obtenir l'ensemble des probabilités on peut utiliser un tableur ou une calculatrice.
Exemple : Représentation de la loi binomiale B(10 ; 0,4) à l'aide d'un tableur :



Dans la première colonne, on écrit le nombre de réussites ; la syntaxe de la commande "loi binomiale" est la suivante : LOI.BINOMIALE(nombre de succès ; tirages ; probabilité de succès ; cumulative).
En B2 on sélectionne la fonction LOI BINOMIALE, puis on écrit : = LOI.BINOMIALE (A2 ; 10 ; 0,4 ; FAUX).
On copie ensuite vers le bas.
Pour obtenir le diagramme en bâtons, on sélectionne pour la colonne B le graphique HISTOGRAMME.
(Pour une feuille de calcul OPENOFFICE, on affiche = LOI BINOMIALE (A2 ; 10 ; 0,4 ; 0).)

Représentation graphique à la calculatrice :
Voir fiche "calculatrice" donnée en annexe.

E. Coefficients binomiaux

Définition 9.3 Le nombre $\binom{n}{k}$, qui est le nombre de chemins menant à k succès dans un arbre à n branches, est appelé coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

On peut déterminer $\binom{n}{k}$ à l'aide de la calculatrice.

Exemple 9.2 Le coefficient $\binom{6}{4}$ s'obtient ainsi :
- sur Casio : 6 OPTN PROB nCr 4
- sur TI : 6 math PRB Combinaison 4

Remarque 9.2 Pour n entier naturel non nul, en notant $n!$ le nombre $n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$, et en posant $0! = 1$.
On a, pour n et k entiers naturels tels que $k \leq n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

Propriété 9.4 Pour tout entier n et tout entier k tels que $k \leq n$, on a :

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. si de plus $k < n$, alors : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Cette dernière formule est la "formule de Pascal".

Démonstration - À savoir refaire !

1. Il y a autant de chemins qui mènent à k succès que de chemins qui mènent à k échecs (c'est-à-dire à $n-k$ succès)
2. Le coefficient $\binom{n+1}{k+1}$ est le nombre de chemins qui mènent à $k+1$ succès dans une répétition de $n+1$ épreuves de Bernoulli. À l'issue des n premières épreuves, on a trois possibilités :
   - Soit on a déjà $k+1$ succès (et il y a $\binom{n}{k+1}$ possibilités), et il faut que la dernière étape soit un échec ;
   - Soit on a k succès (et il y a $\binom{n}{k}$ possibilités), et il faut que la dernière épreuve soit un succès aussi ;
   - dans tous les autres cas il est impossible d'aboutir à $k+1$ succès.

   Finalement, le nombre de chemins cherché est donc bien $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Application : Le triangle de Pascal[1] : calcul des coefficients $\binom{n}{k}$

n \ p	0	1	2	3	4	...
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
...	...	...	...	...	...	..

Chaque nombre est obtenu en additionnant deux nombres de la ligne du dessus : celui de la même colonne, et celui de la colonne précédente.

1. Blaise Pascal (1623-1662) : philosophe et mathématicien français. Il a notamment inventé la Pascaline, première machine à calculer mécanique. "Son" triqngle était en fait connu des mathématiciens persans du Moyen-âge (X° et XI° siècles), notamment par Omar Khayyam, qui l'utilisait pour développer $(a+b)^n$, ainsi que par les Chinois au XII° siècle...

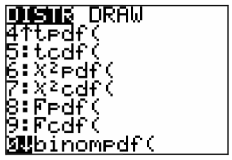
? Un élève répond au hasard aux dix questions d'un QCM. Pour chaque question quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte. On note N le nombre de réponses exactes.
1°) Déterminer l'arrondi à 10^{-4} près de la probabilité pour que l'élève obtienne exactement 5 bonnes réponses ?
2°) Déterminer l'arrondi à 10^{-4} près de la probabilité de l'événement « $N \leq 4$ » ? ?

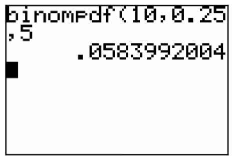
Probabilité de l'événement « $N = 5$ »

10 répétitions indépendantes de la même épreuve de Bernoulli avec une probabilité de succès 1/4. N suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,25$.

Il s'agit de calculer la probabilité de l'événement « $N = 5$ » .

Instruction **DISTR** (touches **2ND** **VARS**).
A l'aide du curseur sélectionner **0 : binompdf(** et **ENTER** .
Renseigner : (nombre d'essais, probabilité de succès, valeur désirée pour la proba)
Séquence : **2ND** **VARS** **0** **10** **,** **0,25** **,** **5** **)** puis **ENTER** .

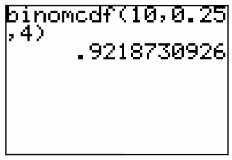




Probabilité de l'événement « $N \leq 4$ »

Instruction **DISTR** (touches **2ND** **VARS**)
A l'aide du curseur sélectionner **A : binomcdf(** et **ENTER** .
Renseigner : (nombre d'essais, probabilité de succès, valeur désirée pour la proba)
Séquence : **10** **,** **0,25** **,** **4** **)** puis **ENTER**

→ *Pour obtenir* $p(N > 4)$, *il suffit de calculer* $1 - p(N \leq 4)$.



⇒ *Compléments*

Obtenir la loi de probabilité de *N* dans la table de valeurs

Touche **Y=**. puis saisir la fonction de probabilité comme ci-contre.

Instruction **TBLSET** (touches **2ND** **WINDOW**). Régler les paramètres comme sur l'écran ci-contre.

Puis afficher la table de valeurs (**2ND** **GRAPH**).

Obtenir la représentation graphique de la fonction de répartition de *N*

Touche **Y=** puis saisir la fonction de répartition comme ci-contre (par définition, $F(x) = p(N \leq x)$).

Touche **WINDOW**. Régler la fenêtre graphique comme sur l'écran ci-contre.

Puis afficher la courbe (**GRAPH**) en choisissant un tracé **non relié** (**MODE** puis **Dot**).